EXERCICES SUR LES BASES DE GRÖBNER NON COMMUTATIVES

4 novembre 2025

Exercice 1. Considérons l'idéal bilatère $I = \langle x_ix_j - x_jx_i \mid 1 \le i < j \le n\rangle$ de $K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Montrer que l'ensemble $G = \{x_ix_j - x_jx_i \mid 1 \le i < j\}$ est une base de Gröbner de I pour l'ordre `deglex`.

Exercice 2. Considérons l'idéal bilatère $I = \langle x_ix_{i+1}x_i - x_{i+1}x_ix_{i+1} \mid 1 \le i < n\rangle$ de $K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Montrer que l'ensemble $G = \{x_ix_{i+1}x_i - x_{i+1}x_ix_{i+1} \mid 1 \le i < n\}$ n'est pas une base de Gröbner de I pour l'ordre `deglex`.

Exercice 3. L'*algèbre extérieure* en n variables est

$$\Lambda = K\langle x_1, \dots, x_n\rangle / \langle x_ix_j + x_jx_i \ (1 \le i < j \le n), x_i^2 \ (1 \le i \le n)\rangle.$$

Soit $I = \langle x_ix_j + x_jx_i \ (1 \le i < j \le n), x_i^2 \ (1 \le i \le n)\rangle$. Montrer que $G = \{x_ix_j + x_jx_i \ (1 \le i < j \le n), x_i^2 \ (1 \le i \le n)\}$ est une base de Gröbner de I pour l'ordre `deglex`.

Exercice 4. Soit $\pi : K\langle x_1, \dots, x_n\rangle \to K[x_1, \dots, x_n]$ la projection canonique. Soit $<$ un ordre monomial sur $K[x_1, \dots, x_n]$. On définit un ordre $\prec$ sur les monômes de $K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ ainsi :

$$\begin{aligned} m_1 \prec m_2 \quad \Longleftrightarrow \quad & \pi(m_1) < \pi(m_2) \text{ ou} \\ & (\pi(m_1) = \pi(m_2) \text{ et } m_1 <_{\texttt{deglex}} m_2). \end{aligned}$$

Montrer que $\prec$ est un ordre monomial.

Exercice 5. On considère l'opérateur de dérivée partielle ∂_i sur $K[x_1, \dots, x_n]$, qui envoie un polynôme f sur $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. On note que

- les opérateurs ∂_i et ∂_j commutent ;
- ∂_i commute avec la multiplication par x_j si $i \neq j$;
- $\partial_i(x_i f) = x_i\partial_i(f) + f$.

L'*algèbre de Weyl* est l'algèbre $W = K\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n\rangle/I$, où I est l'idéal bilatère engendré par les générateurs

(1) $x_ix_j - x_jx_i, 1 \le i < j \le n$

(2) $\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i, 1 \le i < j \le n$

(3) $\partial_ix_j - x_j\partial_i, 1 \le i, j \le n, i \neq j$

(4) $\partial_ix_i - x_i\partial_i - 1, 1 \le i \le n$.

Montrer que ces générateurs forment une base de Gröbner de I pour l'ordre `deglex`.

Exercice 6. Dans Sagemath, implémeter une fonction qui prend en entrée un polynôme f et une liste de polynômes $[f_1, \dots, f_r]$ dans $\mathbb{Q}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ et qui renvoie (Q, R), où $f = Q + R$ est le résultat de la division multivariée.

Quelques fonctions utiles :

- `FreeAlgebra(QQ,"x,y,z", 3)` renvoie $\mathbb{Q}\langle x, y, z\rangle$.

— Si `f` est un polynôme, les méthodes `f.leading_term()`, `f.leading_coefficient()`, `f.leading_monomial()` renvoient le terme, coefficient et monôme dominant de `f`, respectivement.

Sagemath n'a pas de fonction permettant de vérifier si un monôme non commutatif en divise un autre. Il faudra en créer une, par exemple en convertissant les monômes en `string`.